Estructuras Algebraicas asociadas a Lógicas No-clásicas

Índice

1. Introducción

El presente proyecto es una continuación del proyecto *Estudio Algebraico y Topológico de Lógicas No-clásicas.* El mismo se enmarca en las áreas de Lógica Algebraica y Estructuras Algebraicas Ordenadas. En esta nueva etapa continuaremos profundizando el estudio de los fundamentos de las lógicas no-clásicas utilizando herramientas algebraicas, topológicas, de la teoría de modelos y de la teoría de categorías. La expresión Lógicas no-clásicas se utiliza para definir lógicas diferentes al Cálculo Proposicional Clásico, como por ejemplo las lógicas que extienden a la intuicionista, las lógicas intermedias, las lógicas relevantes, o las lógicas multivaluadas. De igual manera las lógicas modales no-clásicas son lógicas no-clásicas con operadores modales. Muchas de las lógicas mencionadas poseen una semántica algebraica adecuada que aporta un enfoque distinto a su estudio. Por lo general estas semánticas algebraicas son retículos o algún tipo de estructura algebraica con un orden, con operaciones adicionales, como por ejemplo operadores modales, u operadores binarios de fusión o conjunción débil y/o una operación de implicación.

2. Estado actual del conocimiento sobre el tema

El estudio y desarrollo de diferentes sistemas lógicos no-clásicos ha adquirido en la actualidad gran importancia debido a que muchas de estas lógicas sirven como fundamento matemático en diversas áreas del conocimiento, como por ejemplo en Computación Teórica, Inteligencia Artificial, Programación Lógica, etc. Las teorías sobre estos temas se han desarrollado a gran velocidad en los últimos tiempos y nuestro grupo de investigación ha contribuido a tal desarrollo. A continuación haremos una breve reseña del estado actual del conocimiento de los los sistemas que estudiaremos durante el desarrollo de este proyecto.

Una de las primeras lógicas no-clásicas más importantes tanto desde el punto de vista matemático como del punto de vista de las aplicaciones, es la lógica intuicionista **Int**. Esta lógica, a diferencia de la lógica clásica, considera que para llegar a una verdad es necesario poder construir siempre una demostración. De esta forma rechaza el principio del tercero excluido. Así como la lógica clásica se puede estudiar por medio de las álgebras de Boole, también la lógica intuicionista admite una interpretación algebraica. Las álgebras en este caso son llamadas álgebras de *Heyting* y son retículos distributivos acotados dotados de una operación binaria $\rightarrow$, llamada implicación intuicionista. El fragmento implicativo de la lógica intuicionista, es decir, aquella cuyos conectivos estan restringidos a $\{\rightarrow, 1\}$, se puede estudiar algebraicamente por medio de la variedad de álgebras de Hilbert. Estas álgebras juegan un papel fundamental en lógica y aparecen en muchas estructuras algebraicas ordenadas. Los avances más importantes sobre estas álgebras están referidos a la teoría de representación por medio de conjuntos y espacios topológicos. Mencionamos los artículos [20, 24] y [25] como los más relevantes en este sentido.

En los últimos años, por motivaciones de problemas originados en Computación Teórica y en Inteligencia Artificial, ha quedado de manifiesto la importancia del estudio de operadores modales en distintas lógicas no-clasicas como en las estructuras algebraicas asociadas, como por ejemplo en álgebras de Boole, en álgebras de Heyting, en álgebras de De Morgan o en algunos fragmentos de estas álgebras. En consecuencia, el estudio de los operadores modales en cualquier lógica no-clásica presenta interés no solamente desde el punto de vista teórico sino también desde el punto de vista de las posibles aplicaciones a otras ramas de la ciencia.

Otra área de investigación muy activa actualmente es el estudio algebraico y topológico de los espacios de aproximación [44, 45]. En 1962, H. de Vries [38] introduce la noción de *compingent Boolean algebra* como un par $\langle B, \prec \rangle$ donde B es un álgebra de Boole y $\prec$ es una relación binaria definida en B conocida como de aproximación (o subordinación) y que satisface condiciones similares a los espacios de proximidad [44]. H. de Vries probó que la categoría **HC** de los espacios compactos y Hausdorff donde los morfismos son las funciones continuas es dualmente equivalente a la categoría **VAlg** de las compingent Boolean algebras completas (llamadas hoy álgebras de Vries) con apropiados morfismos entre ellas. Otra dualidad para categoría **HC** fue demostrada por J. R Isbell en [43]. Isbell probó que la categoría **MReg** de los marcos compactos y regulares con los homomorfismos que preservan los ínfimos finitos, el cero y los supremos generalizados es dualmente equivalente a la categoría **HC**. Es importante destacar que los resultados de Isbell fueron descubiertos 10 años después que la dualidad de Vries. Como consecuencia del trabajo de H. de Vries y de J. R. Isbell tenemos que las categorías **VAlg**, **HC** y **MReg** son dualmente equivalentes. Estas importantes dualidades establecen una interesante conexión entre álgebra y topología que ha sido explotada intensamente y actualmente es un área interesante de trabajo. En los últimos años han surgido muchos trabajos donde se investigan relaciones de aproximación en el contexto de las álgebras de Boole [6, 32, 29, 31, 33, 34, 35, 30, 45] o en el contexto de retículos, particularmente en retículos completos [1, 3, 28, 30, 39]. Un resultado importante sobre la conexión entre aproximaciones y compactificaciones fue dado por Smirnov [44], donde se demuestra que existe un isomorfismo de orden entre relaciones de proximidad definibles en un espacio completamente regular y compatibles con la topología, y las compactificaciones del espacio. Este resultado se puede obtener como corolario de la dualidad desarrollada por H. de Vries. Dichas técnicas han sido extendidas de diversas maneras, por ejemplo, en [1] Banaschewski muestra que, similarmente y en un contexto más general, relaciones de proximidad sobre marcos completamente regulares determinan todas las compactificaciones del marco. La construcción de Banaschewski se basa en una clase particular de ideales, llamados en general round ideals. Como observa Giovanni Curi en [28] las construcciones dadas por Banaschewski son generalizables al contexto de retículos distributivos pseudocomplementados completos. Estos trabajos permiten conjeturar que ciertos resultados y construcciones dependen de la estructura reticular y de la presencia de una operación de negación más débil que la negación booleana. Ya que los marcos son retículos completos cumpliendo ciertas condiciones adicionales, esto sugiere la posibilidad de desarrollar una dualidad al estilo de la dada por H. de Vries, pero en retículos pseudocomplementados distributivos completos.

Por otra parte y por motivos totalmente diferentes, en [18, 19, 22] se introducen en la clase de las álgebras de Boole una generalización de los operadores modales, llamados operadores cuasi-modales. Un retículo cuasi-modal es un retículo distributivo acotado A dotado de una función $\Delta : A \to \mathrm{Id}(A)$, donde $\mathrm{Id}(A)$ es el conjunto de los ideales de A, satisfaciendo condiciones similares al operador modal tipo box $\Box$. Se puede comprobar que existe una equivalencia entre relaciones binarias $\prec$ (llamadas subordinaciones en [3]) y cuasi-operadores modales. La importancia de este hecho radica en que la teoría de espacios de aproximación [44] está íntimamente ligada a la teoría de los operadores cuasi-modales, y estos a su vez están fuertemente ligados a la lógicas modales. La estrecha conexión entre relaciones de aproximación y operadores cuasi-modales no ha sido observada en ninguno de los trabajos citados. Esta conexión abre nuevas posibilidades y plantea nuevos problemas. Además, siendo los operadores cuasi-modales una generalización de los operadores modales, es factible de aplicar técnicas desarrolladas para estudiar las lógicas y álgebras modales al caso de los retículos con relaciones de aproximación.

La importancia de estos temas teóricos se pone de manifiesto al ver la amplia bibliografía desarrollada en los últimos años. Por esta razón se les ha otorgado secciones del Mathematical Reviews como por ejemplo, 03G20 "Lukasiewicz and Post algebras", 06D30 "De Morgan algebras, Lukasiewicz algebras", 06D35 "MV-algebras", 03B47 "Substructural logics", y 03B50 "Many-valued logics".

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

El objetivo principal de este proyecto es continuar con investigaciones en diversas semánticas algebraicas y relacionales de algunas lógicas proposicionales. Estudiaremos estructuras algebraicas ordenadas (semirretículos, álgebras de Hilbert, retículos con operaciones adicionales, etc.) que corresponden a la semántica algebraica de diversas lógicas proposicionales no-clásicas, y algunas estructuras relacionales, como marcos de Kripke ordenados, o conjuntos dotados de multirelaciones, que sirven de semántica relacional de algunas lógicas. Investigaremos la conexión entre las semánticas algebraicas y relacionales a través de la teoría de representación, utilizando métodos provenientes del Álgebra Universal, la Teoría de Modelos y la Topología General. Además, estamos interesados en un nuevo campo que es el estudio de las relaciones de proximidad en estructuras algebraicas ordenadas y su conexión con diferentes tipos de espacios topológicos. Esto permitiría, entre otras cosas, investigar las compactificaciones en algunos espacios topológicos ordenados utilizando la teoría de relaciones de aproximación.

3.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos que planteamos a continuación describen varios problemas concretos que han surgido de los estudios realizados en estos últimos años y cuyo interés en el ámbito de la lógicas no-clásicas reclaman un pronto desarrollo de los mismos. La lista no es exhaustiva, porque como es bien sabido, en este tipo de investigaciones teóricas los problemas surgen a medida que se profundizan las investigaciones. A continuación describimos los objetivos específicos que seguiremos en relación con las distintas estructuras mencionadas:

1. **Retículos pseudocomplementados distributivos y álgebras de Heyting con una relación de aproximación.** Nos proponemos investigar los retículos pseudocomplementados distributivos y álgebras de Heyting con una relación de aproximación. Algunos resultados iniciales fueron dados en los artículos [28] y [39] en relación con el estudio de problemas de completamiento por medio de retículo de ideales y compactificaciones. Como primer paso se intentaría generalizar la dualidad desarrollada por Hendrik de Vries en su tesis [38]. Esta dualidad afirma que las álgebras de Boole completas dotadas de una relación de aproximación cumpliendo ciertas condiciones adicionales son duales a los espacios topológicos compactos y Hausdorff. Este resultado ha sido recientemente extendido al contexto de espacios localmente compactos en el artículo [29]. Siguiendo con el objetivo

anterior, se propone desarrollar una representación tipo Stone y tipo Priestley para este tipo de estructuras.

2. **Dualidad y representación para álgebras de Hilbert con operaciones reticulares y operadores modales monótonos.** Este objetivo es continuación de un objetivo similar en otros proyectos anteriores. En este sentido continuamos con el estudio de álgebras de Hilbert donde el orden tiene una estructura de semirretículo o de retículo, y que a la vez se definen operadores modales de posibilidad o de necesidad que pueden ser normales o monótonos. Hemos avanzado bastante en el estudio de álgebras de Hilbert con operadores modales normales, como se puede observar en los artículos [25, 24, 26]. En esta segunda etapa estamos interesados en estudiar los operadores monótonos [23, 8] en álgebras dotadas de una implicación tipo Hilbert o en semirretículos distributivos. Este tipo de operadores tienen importancia en lógica Modal, y en algunas aplicaciones asociadas a ciertas semánticas utilizadas en Computación Teórica e Inteligencia Artificial. El primer paso es estudiar el caso de las álgebras de Hilbert con supremo dotados de un operador modal monótono. Estas álgebras corresponden al fragmento $\{\vee, \rightarrow, \Box\}$ de cierta lógica intuicionista con un operador modal monótono. Como segundo paso pretendemos estudiar el fragmento algebraico de las lógicas intuicionistas concurrentes. En este sentido los trabajos [21, 40, 41, 46] son el punto de partida para nuestro propósito. El primer punto que deberemos abordar es desarrollar una representación relacional y una dualidad topológica para estas clases de álgebras que permita estudiar semánticamente los fragmentos implicativos de estas lógicas.

3. **Extensiones de Hilbert.** La noción de Extensiones de Hilbert en retículos distributivos permite estudiar y representar las implicaciones de Hilbert que se pueden definir en un retículo distributivo acotado. También permite estudiar la variedad de las álgebras de Hilbert cuyo orden es un retículo distributivo acotado. El objetivo principal es estudiar en detalle esta nueva noción, investigar la variedad de las álgebras de Hilbert cuyo orden es un retículo distributivo acotado, y tratar de desarrollar una dualidad bitopológica [4] para esta variedad.

4. **Operadores modales en casi-retículos distributivos.** Un casi-retículo (nearlattice) es una clase de supremo-semirretículos con la propiedad que todo filtro principal es un retículo. Esta clase de álgebras es una generalización de las álgebras de Tarski y tiene la particularidad de que es una variedad cuya operación algebraica es ternaria. Dichas álgebras fueron estudiadas principalmente por W. Cornish y Hickman en [27] y [42], y últimamente en [9, 12]. El objetivo es estudiar operadores modales en estas estructuras. Como los casi-retículos tienen supremo es posible definir operadores modales tipo $\Diamond$ en forma directa, pero no ocurre lo mismo con los operadores tipo $\Box$, ya que en estas clases de álgebras el ínfimo solo existe en los filtros principales. La definición de este tipo de operadores modales es más complicado que en los casos usuales.

4. Metodología

La metodología es la usual en matemática. Durante el desarrollo del presente proyecto se ha planificado dictar cursos y seminarios especializados, asistir a conferencias y congresos sobre el tema, y el estudio de artículos y publicación de los resultados obtenidos.

5. Plan de actividades

Durante el desarrollo del presente plan se pretende dictar cursos y desarrollar seminarios en los siguientes temas:

1. Álgebra Universal y Teoría de Modelos.
2. Teoría de Retículos Distributivos. Representaciones Topológicas (representación de Stone y de Priestley). Retículos Distributivos con Operaciones.
3. Estructuras Algebraicas Residuadas (Retículos Residuados, BL-álgebras, MV-álgebras, etc).
4. Lógicas Multivaluadas y Lógicas no-clásicas con operadores modales. Semánticas algebraicas (álgebras relevantes, retículos residuados, álgebras modales, etc).
5. Semirretículos distributivos, álgebras de Hilbert, semirretículos implicativos.

6. Estado de avance del proyecto

Como la investigación que llevaremos a cabo es continuación de la que actualmente desarrollamos, los resultados hasta aquí obtenidos son el sustento de los nuevos objetivos especificados en el presente proyecto. Mencionamos a continuación algunos resultados preliminares.

1. Se ha logrado estudiar de una forma bastante completa los operadores modales normales tipo $\Box$ y tipo $\Diamond$ en álgebras de Hilbert. Esto ha permitido entender mejor el comportamiento de los operadores modales en fragmentos de la lógica intuicionista. Los resultados obtenidos hasta la fecha se encuentran publicados en los artículos [25] y [26].
2. Hemos avanzado en el estudio de las álgebras de Hilbert cuyo orden es un semirretículo o un retículo. Por ejemplo, en [14] se logró mejorar la dualidad topológica desarrollada inicialmente en [24] y se aplicó este resultado a estudiar las álgebras de Hilbert con supremo. Se demostró que esta clase de álgebras de Hilbert es una variedad, y que admite una buena representación por medio de ciertos espacios topológicos sober. también se logro estudiar los ideales en esta variedad. Posteriormente, en los artículos [14] y [15] se estudiaron diversas clases de filtros e ideales en álgebras de Hilbert y en álgebras de Hilbert con supremo. Estos resultados ponen de manifiesto la rica estructura que son las álgebras de Hilbert y la gran posibilidad que se presenta en cuanto a problemas a estudiar, cuando el orden asociado a la implicación de Hilbert corresponde a un orden de semirretículo o de retículo.
3. En el proyecto anterior se había planteado estudiar la clase de los casi-retículos, comúnmente conocidos como nearlattices. En este punto se han logrado interesantes avances en su estudio. Por un lado en el artículo [12] se demostró que los nearlattices son dualmente equivalentes a ciertos espacios topológicos dotados de una subbase de abiertos compactos y co-compactos satisfaciendo una propiedad adicional. Esta representación generaliza a la

representación topológica de las álgebras de Tarski. Además se pudo caracterizar a las subálgebras y las congruencias en términos topológicos. Por otra parte, en el artículo [9] se propuso una nueva definición de aniquilador o anular relativo, que sirvió, entre otras cosas, para dar diferentes caracterizaciones de la variedad de los near distributive lattices. En este trabajo también se estudiaron caracterizaciones de los nearlattices normales y lineales, se estudio el retículo de los filtros y se obtuvieron resultados referidos a homomorfismos de nearlattices que preservan, en un cierto sentido, los aniquiladores.

4. Se han logrado varios resultados en el objetivo de estudiar propiedades de aniquiladores en álgunas estructuras algebraicas ordenadas, como semirretículos, retículos y retículos residuados. Un conocido resultado en la teoría de retículos afirma que un retículo es distributivo si y sólo si cada aniquilador relativo es un ideal. Este resultado fue extendido por Jules Varlet en el caso de semirretículos distributivos. Posteriormente, en el artículo [16] se extienden todos estos resultados y se prueban nuevas caracterizaciones de la propiedad de distributividad para semirretículos. Siguiendo esta misma línea de investigación, en [13] se estudian homomorfismos y las congruencias que preservan aniquiladores en la clase de los semirretículos distributivos acotados. Resultados similares, pero para el caso de retículos distributivos acotados, fueron obtenidos en el trabajo [17].

7. Aportes académicos y/o transferencia

Contribución al avance del conocimiento científico

El estudio y la formalización de las diferentes teorías que involucran lógicas no-clásicas constituyen la base fundamental para las actuales aplicaciones de estas lógicas en diversos ámbitos de investigación, así como también para las potenciales aplicaciones. Nuestro grupo está interesado en varios sistemas de lógicas no-clásicas, como ser, los sistemas de lógicas multivaluadas, los sistemas subestructurales, distintos sistemas de lógicas modales y lógica intuicionista, entre otros.

Contribución a la formación de recursos humanos

El presente proyecto tiene como uno de sus ejes principales la formación de recursos humanos.

El Lic. Ismael Calomino cuenta con una beca otorgada por el CONICET desde abril del 2011 para realizar estudios de doctorado y está inscripto en el Doctorado en Matemáticas de la Universidad Nacional del Sur. Su tema de investigación está centrado en el estudio de estructuras más débiles que los retículos distributivos. Particularmente está investigando los casi-retículos distributivos. Su director es el Dr. Celani. Está en la etapa final de redacción de sus tesis doctoral, ya que losresultados originales han sido publicados en diversos trabajos [9, 12, 16]. Se espera que presente su tesis en noviembre o diciembre de 2015 y que su defensa se realize en febrero o marzo de 2015. Con el objetivo de continuar y profundizar sus estudios en el área de Lógica Algebraica, el Lic. Calomino se ha presentado a una beca posdoctoral bajo la dirección del Dr. Luis Castiglione de la Universidad Nacional de la Plata.

Durante el año 2010 la Lic. Daniela Montangie (de la Universidad Nacional del Comahue) se inscribió en el Doctorado en Matemáticas de la Universidad Nacional del Sur. Su tema de investigación es la teoría de Representación y Dualidad para las álgebras de Hilbert. Su director es el Dr. Celani. Ya ha presentado la tesis en el Departamento de Matemática de la UNS. Se prevee la defensa entre octubre o noviembre del 2015.

La Lic. Paula Menchón es becaria del CONICET desde el 2013 y realiza estudios en el área de Lógica Algebraica. Esta inscipta en el doctorado en Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Su tema de trabajo se centra en el estudio de operadores monótonos en álgebras de Hilbert y en el estudio del fragmento $\{\vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ de las Lógicas Concurrentes con base intuicionista.

La alumna Isis Gallardo ha obtenido recientemente una beca para alumnos universitarios de la Comisión de Investigaciones Científicas para realizar estudios en el área de Lógica Algebraica. Su tema de trabajo se centra en las álgebras de Vries y su representación por medio de espacios compactos y Hausdorff. La alumna Gallardo ha solicitado una beca al CONICET para realizar estudios de doctorado bajo la dirección del Dr. Celani.

8. Antecedentes del grupo en la temática

El grupo de trabajo ha desarrollado estudios de las distintas estructuras algebraicas relacionadas con lógicas y con estructuras ordenadas. Esto se evidencia en las publicaciones sobre estos temas en prestigiosas revistas internacionales del área y la colaboración con renombrados especialistas en estos temas. A continuación citamos algunas de estas publicaciones y comentamos algunos de los resultados obtenidos por los miembros del grupo.

1. En el estudio de la variedad de las álgebras de Hilbert se han realizado interesantes avances que han quedado plasmados en los artículos [14, 15]. Principalmente se ha logrado caracterizar los α-ideales y los α-filtros en algunas variedades de álgebras de Hilbert.

2. En el tema álgebras de Hilbert modales el principal aporte ha sido el desarrollo de una dualidad categórica entre las álgebras de Hilbert con un operador modal de necesidad $\Box$ y ciertos espacios topológicos sober con una base de abiertos y compactos, dotados de una relación binaria cerrada. Estos resultados han sido publicados en [26]. También se han obtenido resultados sobre álgebras de Hilbert con supremo. Estos resultados se han publicado en [25]. En la línea de operadores de imposibilidad, se ha realizado un estudio detallado de las álgebras de Hilbert con supremo dotadas de un operador modal $\Diamond$. Los resultados obtenidos hasta la fecha han sido publicados en el artículo [10].

3. En relación a los casi-retículos, se han logrado caracterizar completamente sus espacios duales, las congruencias en términos de ciertos subconjuntos saturados y las subálgebras. Algunos de estos resultados están en el artículo [12]. Otros resultados referidos a aniquiladores, caracterizaciones de los casi-retículos distributivos, etc. se encuentran en el artículo [9].

4. También hemos realizado aportes en la teoría de semirretículos distributivos, estudiando y presentando nuevas caracterizaciones [16], y en la teoría de aniquiladores en retículos distributivos acotados [17].

9. Facilidades disponibles

Este proyecto se desarrollará en el marco institucional del NUCOMPA (Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada) situado en el Campus Universitario de la Universidad Nac. del Centro de la Pcia. de Buenos Aires. Los lugares de trabajo se encuentran en el edificio de Boxes de Investigación correspondientes a la Facultad de Ciencias Exactas. Consideramos que el proyecto tiene alta probabilidad de éxito. Avala esta opinión la experiencia en el tema de los integrantes y los resultados que fueron comunicados en congresos y publicados muchos de ellos en revistas internacionales de buen nivel científico y difusión internacional.

Colaboración con otras instituciones

Actualmente existe una estrecha colaboración con investigadores del Departamento de Lógica de la Univ. de Barcelona, en especial con el Dr. Ramón Jansana. También se tiene un fluido contacto con investigadores de la U.N.L.P., en particular con el Dr. Jose Luis Castiglione y el Dr. Hernán San Martín.

Por otra parte el Dr. Sergio Celani ha formado parte del proyecto MaToMUVI—*Mathematical Tools for the Management of Uncertain and Vague Information*, financiado por la Marie Curie Actions—International Research Staff Exchange Scheme (IRSES) de Comunidad Europea. Por este proyecto recibimos a principios del 2015 la visita del Dr. Ramón Jansana de la Universidad de Barcelona y del Dr. Carles Noguera del Institute of Information Theory and Automation (UTIA) Academy of Sciences of the Czech Republic, quienes estuvieron aproximadamente durante un mes colaborando y dictando un curso sobre Lógicas algebrizables.

Este proyecto finalizó en marzo de 2015, pero hemos presentado un nuevo proyecto que está en la etapa de evaluación. Este nuevo proyecto es continuación del anterior, pero ahora se ha ampliado sus participantes. En esta ocasión se incorporarían grupos de la república Checa, y de Holanda. Al igual que en el proyecto anterior, el objetivo principal es coordinar investigaciones conjuntas entre investigadores de los grupos intevinientes en el área de Lógicas No-clásicas y sus aplicaciones.

10. Fuentes de financiamiento

Se cuenta con un subsidio otorgado por el CONICET a través del Proyecto de Investigaciones Plurianuales titulado *Estudio Algebraico y Topológico de Lógicas No-clásicas* PIP 112-201101-00636. Debido a que este proyecto finaliza en 2016 hemos presentado un nuevo proyecto PIP a la última convocatoria del CONICET. Dicha presentación involucra a grupos de investigación de la Universidad de Buenos Aires, Universidad Nacional de la Plata y de la Universidad Nacional del Litoral.

Como este proyecto es continuación de investigaciones desarrolladas en el Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada (NUCOMPA), recibiría, como fuente de financiamiento, un porcentaje del subsidio que la SeCyT de la UNCPBA otorga al NUCOMPA.

Referencias

[1] Banaschewski, B.: *Compactification of frames.* Math. Nachr., 149, 105-115, (1990).

[2] Bezhanishvili, G.: *Zero-dimensional proximities and zero-dimensional compactifications.* Topology and its Applications, 156, 1496-1504, (2009).

[3] Bezhanishvili, G.: *Lattice subordinations and Priestley duality.* Algebra Universalis, 70(4), 359–377, (2013).

[4] Bezhanishvili, G. and Harding, J.: *Proximity Frames and Regularization,* Applied Categorical Structures, Springer Netherlands, 22, 43-78G, (2014).

[5] Bezhanishvili, G., Bezhanishvili, N., Gabelaia, D. and Kurz, A.: *Bitopological Duality for Distributive Lattices and Heyting Algebras*, Mathematical Structures in Computer Science, 20 n3, 359-393,(2010).

[6] Bezhanishvili, G.: *Stone duality and Gleason covers through de Vries duality,* Topology and its Applications, 157, 1064-1080, (2010).

[7] Celani S. A., and Menchón P.: *Remarks on general monotonic neighbourhood frames,* Aceptado en Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. A publicarse durante el 2015.

[8] Celani, S. A.: *Topological Duality for Boolean algebras with a normal n-ary monotonic operator.* Order, Vol. 26, No 1, 49-67, (2009).

[9] Calomino I. and Celani S. A.: *A note on annihilators in distributive nearlattices,* Miskolc Mathematical Notes, Vol. 16, No. 1, pp. 65–78, (2015). HU e-ISSN 1787-2413.

[10] Celani, S. A. and Montangie, D.: *Hilbert algebras with a modal operator* $\Diamond$. Studia Logica, Volume 103, Issue 3, pp 639-662, (2015). DOI 10.1007/s11225-014-9583-y

[11] Celani, *S. A.: σ-ideals in distributive pseudocomplemented residuated lattices*, Soft Computing, Volume 19, Issue 7, pp 1773-1777, (2015). DOI 10.1007/s00500-015-1592-x

[12] Celani, S. A. and Calomino I.: *Stone style duality for distributive nearlattices,* Algebra Universalis, Volume 71, Issue 2, pp 127-153, (2014). ISSN: 0002-5240 (Print) 1420-8911.

[13] Celani, S. A.: *Homomorphisms and congruences preserving relative annihilators in bounded distributive semilattices.* Open Mathematics. Volume 13, Issue 1, ISSN (Online) 2391-5455, (2014). DOI: 10.1515/math-2015-0016.

[14] Celani, S. A.: *Notes in Hilbert algebras with supremum,* Acta Sci. Math. (Szeged) 80:1-2 (2014), 3-19. DOI: 10.14232/actasm-012-267-9, ISSN 0001-6969.

[15] Celani, S. A.: *α-ideals in bounded Hilbert algebras,* Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, Vol. 21, Number 5-6, (2013), pp. 493-510. ISSN 1542-3980.

[16] Celani, S. A. and Calomino, I.: *Some remarks on distributive semilattices,* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 54, 3 (2013), 407-428. ISSN: 0010-2628, ISSN: 1521-3870.

[17] Celani, S. A.: *Remarks on annihilators preserving congruence relations,* Mathematica Slovaca Vol. 62, No. 3 (2012), 689-698. ISSN: 0139-9918

[18] Celani S. A.: *Quasi-Modal algebras.* Mathematica Bohemica Vol. 126, No. 4 (2001), 721-736.

[19] Celani S. A.: *Subdirectly irreducible quasi-modal algebras.* Acta Matemática Universitatis Comenianae, No 2, (2005), 119-228.

[20] Celani, S.A. and Cabrer, L.M., *Duality for finite Hilbert algebras*, Discrete Math., 305, 74–99, (2005).

[21] Celani, S. A.: *Concurrent algebras: an algebraic study of a fragment of Concurrent Propositional Dynamic Logic*, aceptado en Algebra Universalis (2011).

[22] Celani, S. A.: *Saturated neighbourhood models of monotonic modal logics*, Revista de la Unión Matemática Argentina 49 No 1 (2008), 111-121.

[23] Celani, S. A.: *Some Monotonic Modal logics related to the Von Wright's logic of place*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino Vol. 66, 1 (2008), 59-74.

[24] Celani, S. A., Cabrer, L. M. and Montangie, D.: *Representation and Duality for Hilbert algebras*, Central European Journal of Mathematics 7, n3 (2009), 463-478.

[25] Celani, S. A. and Montangie, D.: *Hilbert algebras with supremum*, Algebra Universalis Vol. 67 No. 3 (2012), 237-255 DOI 10.1007/s00012-012-0178-z. ISSN: 0002-5240.

[26] Celani, S. A., Montangie, D.: *Hilbert algebras with a necessity modal operator*, Reports on Mathematical Logic, Vol. 49 (2014), 47 - 77, ISSN print: 0137-2904 ISSN online 2084-2589.

[27] Cornish, W. H. and Hickman, R.: *Weakly distributive semilattices* , Acta Math. Acad. Sci. Hungar. Tom. 32 (1978), 5-16.

[28] Curi, G.: *Remarks on the Stone-Čech and Alexandroff compactifications of locales,* Journal of Pure and Applied Algebra 212 (2008).

[29] Dimov, *G.: A Generalization of De Vries Duality Theorem,* Applied Categorical Structures, Springer Netherlands, 17, 501-516, (2009).

[30] Dimov, G. and Vakarelov, D.*: Topological representation of precontact algebras*, in Lecture Notes Comp. Sci., 3929, W. MacCaull et al. (eds.), Springer-Verlag, Berlin (2006), pp. 1-16.

[31] Dimov, G.: *Some generalizations of Fedorchuk duality theorem-I,* Topology and its Applications , 156, 728 - 746, (2009).

[32] Dimov, G. and Vakarelov, D.: *Contact Algebras and Region-based Theory of Space: A Proximity Approach - I,* Fundam. Inform., 74(2-3):209-249, (2006).

[33] Düntsch, I. and Winter, M.: *Algebraization and representation of mereotopological structures,* Journal on Relational Methods in Computer Science, 24, 161-180, (2004).

[34] Düntsch, I. and Winter, M.: *A representation theorem for Boolean contact algebras,* Theoretical Computer Science, 347, 498-512, (2005).

[35] Düntsch, I. and Vakarelov, D.: *Region-based theory of discrete spaces: a proximity approach,* Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 49, 5-14, (2007).

[36] Düntsch, I. and Orłowska E.: *Discrete dualities for some algebras with relations,* Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming 83 (2014) 169–179.

[37] Efremoviĉ, V. A.: The geometry of proximity. I, Mat. Sb. (N.S.) 31 (73) (1952) 189–200 (in Russian).

[38] de Vries, H.: *Compact spaces and compactifications. An algebraic approach,* PhD thesis, University of Amsterdam, (1962).

[39] Gierz G. and Keimel K.: *Continuous ideal completions and compactifications,* Continuous lattices. Proceedings, Bremen 1979, Lecture Notes in Mathematics 871, Springer, Berlin, (1981) 97-124.

[40] Goldblatt, R.: *Parallel action: Concurrent dynamic logic with independent modalities,* Studia Logica, Springer Netherlands, 51, 551-578, (1992).

[41] Goldblatt, R.: *Logics of time and computation,* volume 7 of Lecture Notes. CSLI Publications, second edition, (1992).

[42] Hickman, R. C.: *Join algebras*, Communications in Algebra, vol. 8, pp. 1653–1685, (1980).

[43] Isbell, J. R.: *Atomless parts of spaces.* Math. Scand. 31, 5–32 (1972)

[44] Naimpally S. A. and and Warrack D.: *Proximity Spaces,* Cambridge University Press, Cambridge, (1970).

[45] Vakarelov, D.: *Region-based theory of space: Algebras of regions, representation theory, and logics*, in: D. Gabbay, S. Goncharov, M. Zakharyaschev (Eds.), Mathematical Problems from Applied Logic, vol. 2, Springer-Verlag, Heidelberg, (2007), pp. 267–348.

[46] Vakarelov, D.: *Dynamic Modalities,* Studia Logica (2012) 100: 385397. DOI: 10.1007/s11225-012-9383-1.